レポートは7/7(金)までに事務室へ.

5. 位相的漸化式とPainlevé方程式

Painlevé eq では τ函数が大事. τはよい座標系. しかし, 漸近解析をやっていると, τの重要性がよくわからない.

位相的漸化式

- Eynard-Orantin 07
- Chekov-Eynard-Orantin 04

Input

平面代数曲線のパラメーター表示

$$\begin{cases} x = x(z) \\ y = y(z) \end{cases}$$

$z \in \Sigma$: コンパクトRiemann面

$\rightsquigarrow$ **TR** (topological recursion) $\rightsquigarrow$

Output

- $\omega_{g,n}(z_1,\dots,z_n)$ $\begin{pmatrix} g \geqq 0 \\ n \geqq 1 \end{pmatrix}$

  $\| $

  $\underbrace{f_{g,n}(z_1,\dots,z_n)}_{\Sigma^n \text{上の函数}} dz_1 \cdots dz_n$

- $F_g \in \mathbb{C}$ $(g \geqq 0)$

$\boxed{例}$ ・ $\begin{cases} x(z) = z^2 \\ y(z) = z \end{cases}$ $y^2 = x$ (Airy曲線)

$$\rightsquigarrow \omega_{g,n}(z_1,\dots,z_n) = \frac{1}{2^{2g-2+n}} \sum_{d_1,\dots,d_n \geqq 0} \underbrace{\langle \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle_{g,n}} \prod_{i=1}^{n} \frac{(2d_i-1)!!}{z_i^{2d_i+2}} dz_i.$$

$$\| $$

$$\mathbb{Q} \ni \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{d_1} \cdots \psi_n^{d_n}, \quad \psi_i = c_1(\mathcal{L}_i) : \psi 類$$

$X = pt$ の場合のGromov-Witten不変量

これは $2g-2+n > 0$ で成立.

$F_g = 0$ $\leftarrow$ F_g はtrivial

$\square$

例 $\begin{cases} x(z)=\sqrt{E}\,(z+z^{-1}) \\ y(z)=\frac{1}{2}\sqrt{E}\,(z-z^{-1}) \end{cases}$ $\quad y^2=\dfrac{x^2}{4}-E$: Weber 曲線

$$\rightsquigarrow\quad F_g=\underbrace{\frac{B_{2g}}{2g(2g-1)}}_{=\chi(\mathcal{M}_g)}E^{2-2g}\qquad (g\geqq 2).$$

$= \chi(\mathcal{M}_g)$: Harer-Zagier

□

仮定　今日は Σ : genus 0 の場合しかあつかわないが一般的な設定について述べる。

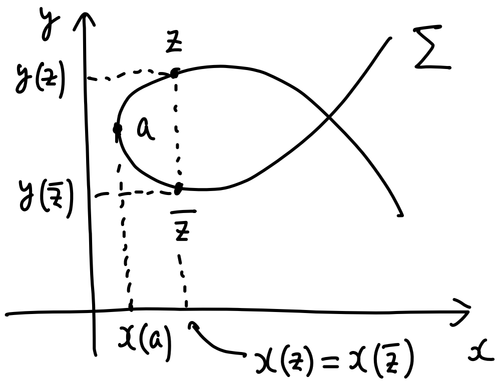
- Σ はコンパクト Riemann 面であるとし，
  種数 g_Σ が 1 以上のとき，
  $H_1(\Sigma,\mathbb{Z})$ のシンプレクテック基底 $A_1,\dots,A_{g_\Sigma},B_1,\dots,B_{g_\Sigma}$ を固定する。
  $\langle A_i,B_j\rangle=\delta_{ij}$
- $x,y:\Sigma\to\mathbb{P}^1$ は Σ 上の有理型函数で
  $\begin{cases} dx \text{ の零点は全て 1 位で} \\ dy \text{ は } dx \text{ の零点で } 0 \text{ でないと仮定する。} \end{cases}$

これらのデータをスペクトル曲線とよぶ。

定義

ramified point

- $dx(a)=0$ となる $a\in\Sigma$ を分岐点という：
  $$R:=\{a\in\Sigma \mid dx(a)=0\}=\{\text{分岐点全体}\}.$$
- z が $a\in R$ の近くにいるとき，次の図の $\bar{z}$ をその共約点とする。



□

例 $\begin{cases} x(z)=z^2 \\ y(z)=z \end{cases}$ $\quad dx(z)=2z\,dz$, $dy(z)=dz$ $\quad R=\{z=0\}$, $\bar{z}=-z$

例 $\begin{cases} x(z)=\sqrt{E}\,(z+z^{-1}) \\ y(z)=\frac{\sqrt{E}}{2}(z-z^{-1}) \end{cases}$ $\quad dx(z)=\sqrt{E}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)dz$ $\quad R=\{z=\pm 1\}$, $\bar{z}=\frac{1}{z}$

$\boxed{\text{定義}}$ (TR, topological recursion)

$\omega_{g,n}(z_1,\dots,z_n)$, $g\geq 0$, $n\geq 1$ を以下で定める，

- $\omega_{0,1}(z_1) := y(z_1)\,dx(z_1)$
- $\omega_{0,2}(z_1,z_2) := B(z_1,z_2) \leftarrow$ Bergmann 核

ここで， $B(z_1,z_2)$ は以下の条件で特徴付けられる：

- $B(z_1,z_2)=B(z_2,z_1)$，
- $B(z_1,z_2) \underset{z_1\to z_2}{\sim} \dfrac{dz_1\,dz_2}{(z_1-z_2)^2} + \text{regular}$， $z_1\neq z_2$ で $B(z_1,z_2)$ は正則，
- $\displaystyle\oint_{z_1\in A_i} B(z_1,z_2)=0 \quad (i=1,\dots,g_\Sigma)$，

$\boxed{\text{例}}$
- $\Sigma=\mathbb{P}^1$ のときは $B(z_1,z_2)=\dfrac{dz_1\,dz_2}{(z_1-z_2)^2}$，
- $\Sigma=$ elliptic curve のときは

$$B(z_1,z_2)=\left(\wp(z_1-z_2)+\frac{\eta_A}{\omega_A}\right)dz_1\,dz_2,\quad \begin{cases}\omega_A=\oint \dfrac{dx}{y}\\ \eta_A=\oint \dfrac{x\,dx}{y}\end{cases}$$

$\Sigma=\{y^2=(x\text{の3次式})\}$

- $\omega_{g,n+1}(z_0,z_1,\dots,z_n)$

$\begin{cases} I=\{i_1<\cdots<i_m\}\text{のとき}\\ z_I=(z_{i_1},\dots,z_{i_m})\end{cases}$

$$:=\sum_{a\in R}\operatorname*{Res}_{z=a} K(z,z_0)\left(\omega_{g-1,n+2}(z,\bar z,z_1,\dots,z_n)+\sum^{(\text{no }\omega_{0,1})}_{\substack{g_1+g_2=g\\ I\sqcup J=\{1,\dots,n\}}}\omega_{g_1,1+|I|}(z,z_I)\,\omega_{g_2,1+|J|}(\bar z,z_J)\right) \leftarrow (☆)$$

ここで， $K(z,z_0)=\dfrac{1}{2(y(z)-y(\bar z))\,dx(z)}\displaystyle\int_{w=z}^{w=\bar z} B(w,z_0)$．

$(\text{no }\omega_{0,1})$ は「$g_1=0 \Rightarrow I\neq\phi$」かつ「$g_2=0\Rightarrow J\neq\phi$」を意味する

(☆) $=$ ▨ $dz^2\,dz_1\cdots dz_n$， $K(z,z_0)=$ ▨ $\dfrac{dz_0}{dz}$ これらをかけると，

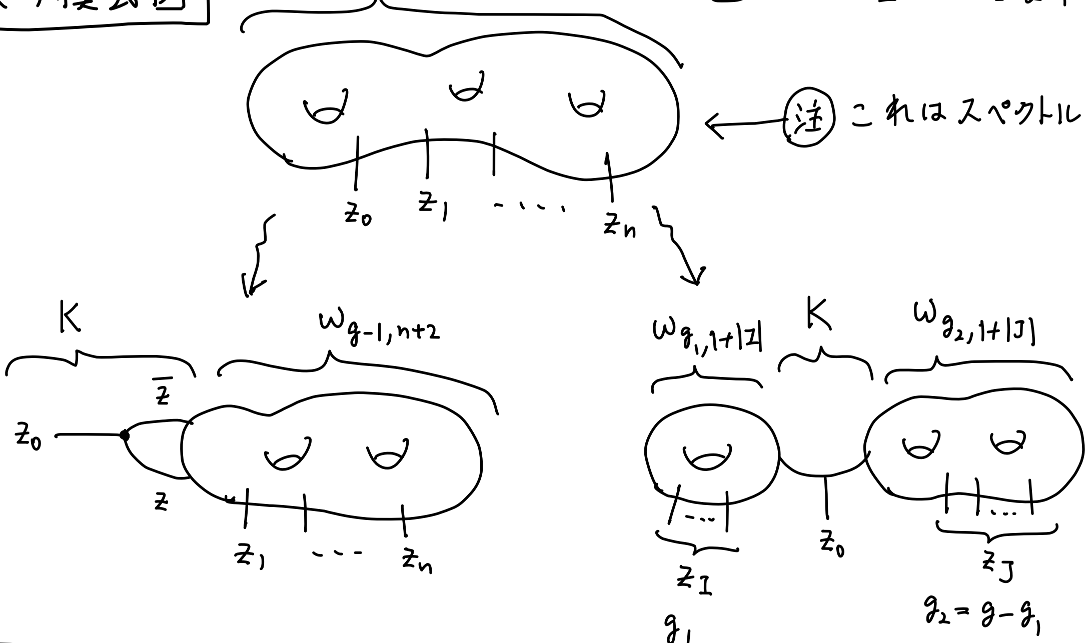
z について 1-form になるので Res をとれる．

□

TRの模式図

注 g は g_Σ と関係ない

注 これはスペクトル曲線ではない.



定義 (自由エネルギー)

$g \geqq 2$ に対して,

$$F_g := \frac{1}{2-2g} \sum_{a\in R} \operatorname*{Res}_{z=a}\left(\Phi(z)\,\omega_{g,1}(z)\right), \quad \Phi(z) := \int^{z} y(z')\,dx(z'), \qquad \square$$

性質

- $\omega_{g,n}$ は $z_1, \dots, z_n$ について対称.
- $2g-2+n>0 \Rightarrow$ $\omega_{g,n}$ は各 z_i の 1-form として, $z_i = a\in R$ を除いて正則, $z_i = a$ では極を持つ. ($z_i = z_j$ でも正則)
- $2g-2+n>0 \Rightarrow \omega_{g,n}(\dots, \bar{z}_i, \dots) = -\,\omega_{g,n}(\dots, z_i, \dots)$.
- $(g,n)\neq(0,1) \Rightarrow \displaystyle\oint_{z_1\in A_i} \omega_{g,n}(z_1, \dots) = 0 \quad (i = 1, \dots, g_\Sigma)$.
- スペクトル曲線がパラメーター t による変形族になっているとする:

$$(x, y) = (x(z), y(z)) = (x_t(z), y_t(z)).$$

もしも, $\displaystyle\frac{\partial x}{\partial t}(z)\,dy(z) - \frac{\partial y}{\partial t}(z)\,dx(z) = \int_{w\in\Gamma} \Lambda(w)\,B(w,z)$

となるような函数 Λ とサイクル Γ がとれたとすると,

Rauch's variational formula を使う.

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\omega_{g,n}(z_1,\dots,z_n)\right|_{x(z_i)\text{ を固定}} = \int_{z_{n+1}\in\Gamma} \Lambda(z_{n+1})\,\omega_{g,n+1}(z_1,\dots,z_n,z_{n+1}),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}F_g = \int_{z\in\Gamma} \Lambda(z)\,\omega_{g,1}(z). \qquad \square$$

WKBとの関係（量子曲線）

cf. Dumitrescu-Mulase 2013〜
Gukov-Sulkowsky 2012〜

例　Airy曲線 $\begin{cases} x(z) = z^2 \\ y(z) = z \end{cases}$　$R=\{z=0\}$, $\bar{z}=-z$　$\left\{ \begin{array}{l}\text{Mathematicaで} \\ \text{カンタンに計算できる}\end{array}\right.$

$$\omega_{0,1}(z) = 2z^2 dz, \quad \omega_{0,2}(z_1,z_2) = \frac{dz_1 dz_2}{(z_1-z_2)^2}, \quad \omega_{0,3}(z_1,z_2,z_3) = \frac{dz_1 dz_2 dz_3}{2z_1^2 z_2^2 z_3^2},$$

$$\omega_{1,1}(z) = -\frac{1}{16}\frac{dz}{z^4}$$

定理 (Zhou 2012)

$$\psi(x,\hbar) = \exp\left(\sum_{\substack{g\geq 0\\ n\geq 1}} \frac{\hbar^{2g-2+n}}{n!} \frac{1}{2^n} \int_{\bar{z}_1}^{z_1}\cdots\int_{\bar{z}_n}^{z_n} \omega_{g,n}(z_1',\dots,z_n') \Big|_{z_1=\cdots=z_n=z(x):=\sqrt{x}} \right)$$

$(g,n)=(0,2)$の部分はうまく修正してdiagonalに制限する。

とおくと、$\psi(x,\hbar)$はAiry方程式 $\left(\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}-x\right)\psi=0$ のWKB解になっている。□

（注 $\begin{pmatrix}\text{主要項}\\ g=0,\ n=1\end{pmatrix} = \hbar^{-1}\frac{1}{2}\int_{\bar{z}}^{z} 2z'^2dz' = \hbar^{-1}\frac{2}{3}z^3\Big|_{z=\sqrt{x}} = \hbar^{-1}\underbrace{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}$.

これはすでに知っている式。）

$$\begin{array}{lcc} \text{スペクトル曲線} & & y^2-x=0 \\ \text{“}y\mapsto\hbar\frac{d}{dx}\text{”} & & \text{TR}\downarrow \quad \uparrow \hbar\to 0 \ \text{準古典極限} \\ \text{量子化} & & \left(\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}-x\right)\psi(x,\hbar)=0 \end{array}$$

一般には$\hbar$の高次の補正が生じる。
現在は具体例をチェックしている最中。

Painlevé 方程式との関係

leading term

$$q_0(t) = \sqrt{\frac{-t}{6}} \quad (6q_0^2 + t = 0)$$

(P$_\mathrm{I}$) $\hbar^2 \dfrac{d^2 q}{dt^2} = 6q^2 + t$

これの(摂動的)形式解 $q(t,\hbar) = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n q_n(t)$ を作れる(これはカンタン).

この形式解が TR が得られることを見る.

{ leading term のブランチを決めると
 残りの項が決まる.

Jimbo-Miwa の Lax pair

Lax pair があることがキーになっている.

$$\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x} = A\Psi, \quad \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = B\Psi, \qquad A = \begin{bmatrix} p & 4(x-q) \\ x^2 + qx + q^2 + \frac{t}{2} & -p \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2}x + q & 0 \end{bmatrix}.$$

これの両立条件は $\hbar\left(\dfrac{\partial A}{\partial t} - \dfrac{\partial B}{\partial x}\right) + [A, B] = 0$.

両立条件を各成分ごとに見てやると, 両立条件は次と同値:

$$\begin{cases} \hbar \dfrac{dq}{dt} = p \\ \hbar \dfrac{dp}{dt} = 6q^2 + t \end{cases} \iff \begin{cases} p = \hbar \dfrac{dq}{dt} \\ \hbar \dfrac{d^2 q}{dt^2} = 6q^2 + t \quad (\mathrm{P_I}) \end{cases}.$$

このタイプの Lax pair $\iff$ isomonodromy 性.

$$A_0(x,t) := A\Big|_{q=q_0(t),\, p=0} = \begin{bmatrix} 0 & 4(x-q_0) \\ x^2 + q_0 x + q_0^2 + \frac{1}{2}t & 0 \end{bmatrix}$$ とおく.

スペクトル曲線を次で定める:

$$\det\left(y - A_0(x,t)\right) = 0$$

$$\iff y^2 - 4(x-q_0)\underbrace{\left(x^2 + q_0 x + q_0^2 + \tfrac{1}{2}t\right)}_{x = q_0 \,\to\, 3q_0^2 + \frac{1}{2}t = 0} = 0$$

$3q_0^2 + \frac{1}{2}t = 0 \quad q_0 = \sqrt{\frac{-t}{6}}$

$$\iff y^2 = 4(x-q_0)^2(x+2q_0) \quad \longleftarrow \text{genus } 0,\ \text{singular}$$

$$\iff \begin{cases} x = x(z) = z^2 - 2q_0 \\ y = y(z) = 2z(z^2 - 3q_0) \end{cases}$$

← 注 $q_0(t) = \sqrt{\dfrac{-t}{6}}$ ← t について family!

← $R = \{z = 0\}$, $\bar{z} = -z$

(Airy と似ている.)

$t \neq 0$ と仮定

$\overset{\text{TR}}{\rightsquigarrow}$ $\begin{cases} W_{g,n}(z_1, \dots, z_n; t) \\ F_g(t) \end{cases}$ ← t による!

定理 (Iwaki-Saenz 2016)

• $$\psi(x,t,\hbar) := \exp\left(\sum_{\substack{g\ge0\\ n\ge1}} \frac{\hbar^{2g-2+n}}{n!}\frac{1}{2^n}\int_{\bar z_1}^{z_1}\cdots\int_{\bar z_n}^{z_n} W_{g,n}(z_1',\dots,z_n';t)\Bigg|_{\substack{z_1=\cdots=z_n\\ =z(x)=\sqrt{x+2q_0(t)}}}\right)$$

は Jimbo-Miwa の Lax 対と同等な2階単独の線形微分方程式の WKB 解である。
(t 方向の微分方程式もみたしている。)

(証明は Airy 方程式の場合と似ているが, スペクトル曲線が singular であることの寄与もあって, …)

• $\log\tau(t,\hbar) := \sum_{g\ge0}\hbar^{2g-2}F_g(t)$ は (P_I) の τ 関数である。

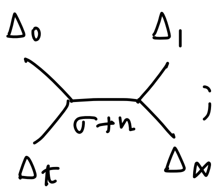
(すなわち, $\hbar^2\frac{d^2}{dt^2}\log\tau(t,\hbar) = -q(t,\hbar)$)　　上の結果の系　□

注意 他の Painlevé 方程式の "摂動的な形式解" (0パラメーター解) についても同様の結果が成立。
$P_{II}\sim P_{VI}$ すべてで OK!　(Iwaki-Marchal, Iwaki-Marchal-Saenz)

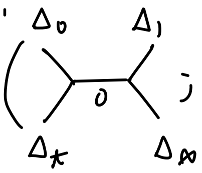
スペクトル曲線は常に種数が0になる!　□

Question 2パラメーター解 (Lisovyy et al.) との関係は?
非摂動的な情報を含む解をどうやって作るか?　□

Lisovyyの解は

$$\tau = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\rho}\, B\Bigg($$ 

$; t\Bigg)$

期待: $\sigma=0$ のとき $\sum_{n\in\mathbb{Z}}$ のとき $\sum_{n\ge0}$ となるだろう。
そうなっていて $e^{i\rho}=0$ とすると, $\tau = B\Bigg($ 

$; t\Bigg)$ となる。

これが WKB 的解なのかなあ。

WKB的解のパラメーターを1つふやせる

$$q(t,\hbar;\alpha) = \underbrace{q^{(0)}(t,\hbar)}_{\text{摂動的形式解}} + \alpha\, q^{(1)}(t,\hbar)\, e^{\frac{1}{\hbar}\phi(t)} + \alpha^2 q^{(2)}(t,\hbar)\, e^{\frac{2}{\hbar}\phi(t)} + \cdots$$

非線形 Stokes 現象

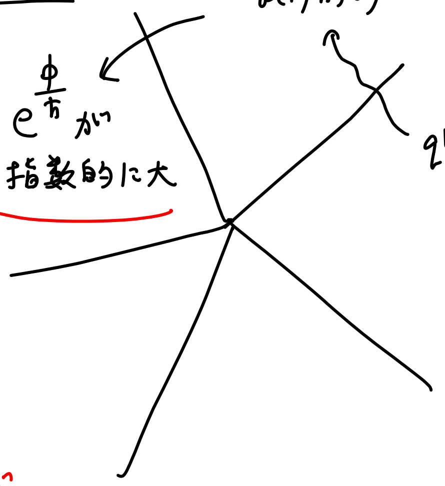
t 平面

$\phi(t) = t^{\frac{5}{4}}$

$e^{\frac{\phi}{\hbar}}$ が指数的に大

$q(t,\hbar;\alpha)$ ← $\frac{\hbar}{2\sqrt{2}}$　Kapaev-Its

$q^{(0)}(t,\hbar)$



5本

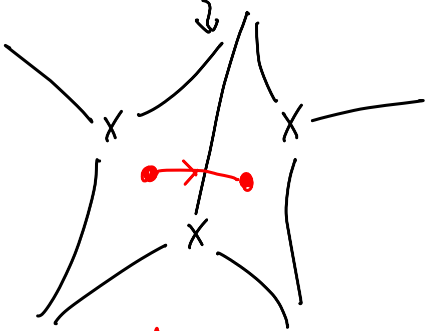
ここがよくわからない

補整項

$$\left(\hbar^2\frac{d^2}{dx^2} - 4(x-q_0)^2(x+2q_0) + \sum_{m\geq 1}\hbar^m a_m(x)\right)\psi = 0,$$

ここに無限和が出て来るので
超幾何では書けないと思う。

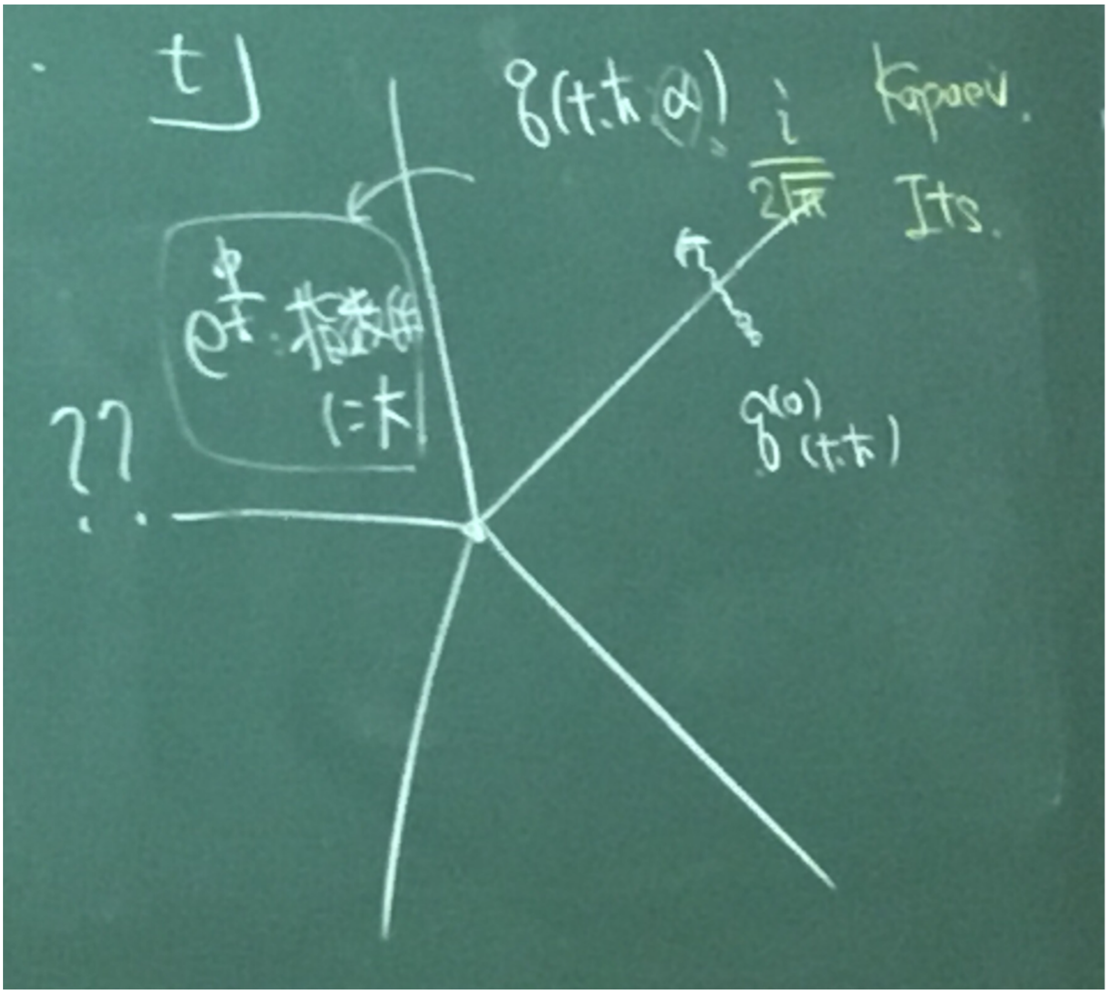
一般解を求めるなら $y^2 = 4x^3 + ax + b$ が出て来るはず

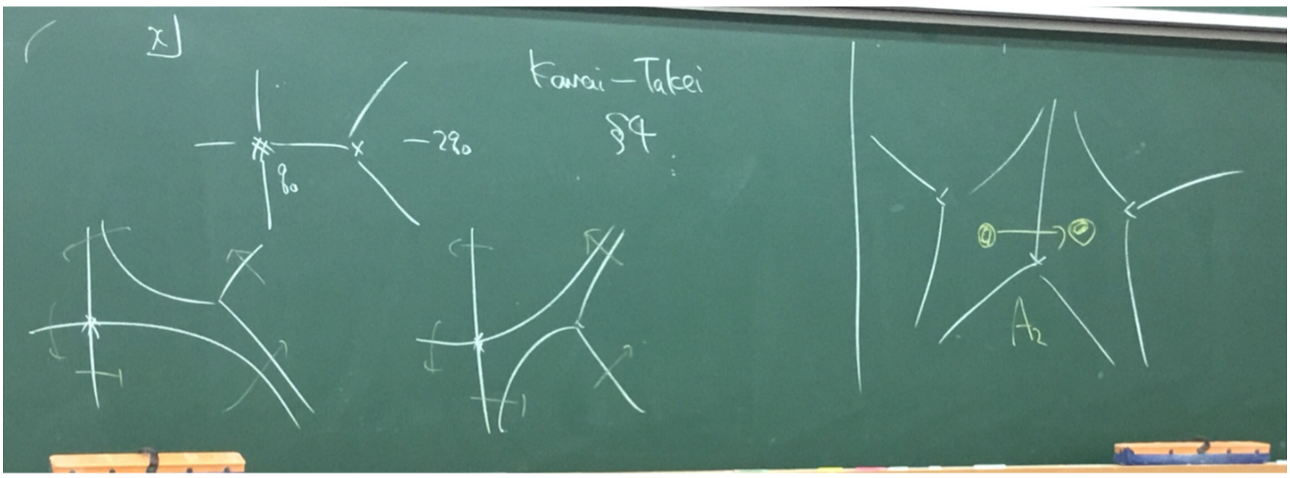


A$_2$-quiver ⟶ $\overbrace{\text{Pentagon}}^{5}$

x 平面

Kawai-Takei §4


t
Kapaev.
Its.
??


x
Kawai–Takei
§4
A2